Introduction to Geometric Arbitrage Theory

高田 英行
東邦大学理学部 情報科学科

Geometric Arbitrage Theory(GAT)の導入からSimone Farinelliとの共同研究で得られた結果までを紹介する。Vázquez & Farinelli (J. Investment Strategies, 2012) 及びFarinelli (J. Geom. Mechanics, 2015) によって提案されたGATは、ある空間の曲率と無裁定条件(No Free Lunch with Vanishing Risk)が関係付けられることを示した。具体的には、半マルチンゲールに従う複数の資産価格過程から成る市場モデルにある種のゲージ変換を導入することによって、ファイナンスとしても意味のある主ファイバー束の構造が入り、更にこの主ファイバー束上にトレーディング戦略の意味を持つ接続(connection)を構成し、その曲率がゼロであればNo Free Lunch with Vanishing Risk条件が満たされることを示した。このような微分幾何学的な視点が有用である理由は、例えば「裁定戦略の本質的な数がどれだけあるのか」をホロノミーで記述できることにある。我々は曲率が消えない場合、即ち裁定が可能な場合に関心があり、例えばBlack-Scholes方程式がどのように書き換えられるかを調べた。

GAT流の微分幾何学的な捉え方は、Divisia Price Indexまで遡る。Price Indexを定義するために財の数量と価格の組み合わせを考えるとき、斜交座標系を考えることから共変微分が自然に現れるが、それを上記の主ファイバー束の接続の理論（考えるLie群は可換なのでU(1)-ゲージ理論に相当）の言葉で書き直し(無)裁定価格付理論と関係付けたものがGATと言うこともできる。

理論的枠組みを記述するために、標準的な数理ファイナンスに登場しない数学的概念をいくつか必要とする。例えば、曲がった空間（正確には、市場モデルを表す主ファイバー束の低空間は平坦だが接続が自明ではない場合を扱う）での確率解析を行うため、Stratonovich積分に対応する確率微分であるNelson微分を用いて自己調達的戦略を定式化することになる。登場する Lie 群は、キャッシュフロー全体を実軸上のコンパクト台を持つシュワルツ超関数全体と見て、群演算として convolution を考えた可換な群である。また、接続を表す１次微分形式から曲率を表す２次微分形式へは微分幾何学の結果をそのまま使う。
この発表から幾何学的な視点の有用性を感じ取っていただければ幸いである。