●もっとも新しい経済理論をやさしく解説する

ナッシュ社会的厚生関数の理論

金子 守（筑波大学講師）

アロー〔1〕の“一般不可能性定理”を簡単に言えば，「社会的厚生関数が満足すべきいくつかの規準を挙げると，それらは必ず矛盾を生じる．つまり，それらの規準を満足する社会的厚生関数は存在しない」と言える．この定理は社会の計画の選択枝に社会的厚生の順序をつけることが一般には不可能であることを意味している．この定理から経済学は一般には価値判断を含む問題に答えられないと結論され，世界の学界に強い衝撃を与えた．

アロー以来，多くの研究者がアローのアプローチおよび条件を吟味することにより，あるいは別個のアプローチを考えるなどして，この問題――つまり受諾可能な社会的厚生関数は存在するかという問題――に挑んできた．それらの研究の多くはアローと同じく不可能性を結論としているが，中には僅少ながら特定の社会的厚生関数を提示した研究もある．たとえば，ヒルドレス〔4〕，ハルサニー〔2〕，ロールズ〔16〕等．しかし，これらの理論では効用の個人間比較が可能であるという仮定を置いており，それに対して理論的説明を与えてはいない．これらに反して，筆者は故中村健二郎東京工大助教授との共同論文〔5〕において，個人間効用比較の仮定を使わずに社会的厚生関数を構成し，それをナッシュ社会的厚生関数と呼んだ．本稿では，ナッシュ社会的厚生関数の理論を紹介し，この理論とアローの理論との違いを明白にし，さらに，いくつかの例によってナッシュ社会的厚生関数を再吟味してみたいと思う．また，ヒルドレス，ハルサニー，ロールズ等の社会的厚生関数の理論との比較も重要であるが紙数の制限により今回は割愛させていただく．

§1. ノイマン－モルゲンシュテルン効用理論と原点

社会的厚生は個人的効用を総合したものとして定義される．したがって，個人的効用について確固とした基礎を持つ理論を採用せねばならない．ここでは，ナッシュ社会的厚生関数の基礎としてノイマン－モルゲンシュテルン効用理論を採用する．

社会の構成メンバーの集合を$N=\{1,2,\cdots,n\}$とし，この社会の選択枝の集合を $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ とする[1]．これらの選択枝の他に原点と呼ぶ固定された選択枝x_0を付け加えて，$X^*=\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$と表わす．

原点x_0は考えうる社会の最悪の状態とする．たとえば，社会のすべてのメンバーが死なねばならない状態等．このように x_0 を“地獄”と仮定することは数学的（形式的）には必要ないが，社会的厚生を考える場合は必要不可欠である．このように設定することで，社会のほとんどすべての状況を理論の枠組の中に組入れることができる．この意味において原点 x_0 を地獄とするのは一種の広範性の条件である．つまり，逆に，x_0を他の状態とするならば，それより悪い状況は理論の枠外におかれることになり，理論は不完全なものになる．社会のあらゆる状況を論じるためには，この設定が必要なのである[2]．

社会の可能な選択枝としてX^*上の確率分布をも含めて考えることにする．X^*上の1つの確率分布を

$$a=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_m)$$

と表わす．aは選択枝$x_t(t=0,1,2,\cdots,m)$を結果とする確率が a_t である確率分布を意味している．したがって，aは，

$$\sum_{t=0}^{m}a_t=1,\quad a_t\geqq 0\quad \text{for all}\quad t=0,1,2,\cdots,m$$

を満足する．X^*上の確率分布の全体を $m(X^*)$ と表わし，$a\in m(X^*)$を社会的くじ，あるいは，混合選択枝と呼ぶ．$(0,\cdots 0,\overset{t}{1},0,\cdots,0)$を x_t と同一視することによりX^*は$m(X^*)$の部分集合になる．また，社会的

くじ$a, b \in m(X^*)$を結果とする確率分布（複合くじ）$(\alpha a*(1-\alpha)b)$をも考える．$(\alpha a*(1-\alpha)b)$はa, bの出現確率がおのおの，$\alpha, 1-\alpha$である確率分布を意味する．しかし，

(1) $(\alpha a*(1-\alpha)b)=(\alpha a_0+(1-\alpha)b_0, \alpha a_1 + (1-\alpha)b_1, \cdots, \alpha a_m+(1-\alpha)b_m)$

for all $a, b \in m(X^*)$, $\alpha \in [0,1]$

と仮定することによって，$(\alpha a*(1-\alpha)b)$は，再び$m(X^*)$の要素になる．同様に，

$(\alpha_1 a^1 * \alpha_2 a^2 * \cdots * \alpha_k a^k)(a^1, \cdots, a^k \in m(X^*), \sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1, \alpha_i \geqq 0)$

等が定義されるが，すべて$m(X^*)$の要素である．

社会的くじは構成メンバーが特定のルーレットをまわすことを意味している．社会的くじをも社会の可能な選択枝とするという仮定は，ノイマン－モルゲンシュテルン効用理論を採用するという理由から必要なのである．しかし，後で示すように，社会的くじを考えることによって社会的厚生が増加すると考えられる場合もあり，社会的厚生を論ずる際にこの仮定は単に技術的に必要なだけでなく，本質的働きをもするのである．

社会の構成メンバー$i \in N$は$m(X^*)$上に選好関係R_iを持つとする．aR_ibはiがbよりaを選好するか無差別であることを意味する．まず，R_iに次の4条件を仮定しよう．

(U-1)（**弱順序性**）：R_iは弱順序，つまり，

(i)：すべての$a, b \in m(X^*)$に対してaR_ibあるいはbR_iaが成り立つ，(ii)：aR_ibかつbR_icならばaR_icが成り立つ．

(i)と(ii)の意味は明白であろう．P_iとI_iを

$aP_ib \Leftrightarrow$ not bR_ia

$aI_ib \Leftrightarrow aR_ib$ & bR_ia

で定義する．aP_ibは個人iがbよりもaを選好することを意味し，aI_ibは無差別であることを意味している．

(U-2)（**確率混合に対しての連続性**）：aP_ibP_icであるならば，ある$\alpha(0<\alpha<1)$に対して$(\alpha a*(1-\alpha)c) I_ib$が成り立つ．

(U-3)（**代替性**）：aI_ibであるとき，任意の$c \in m(X^*)$および$\alpha \in [0,1]$に対して$(\alpha a*(1-\alpha)c) I_i(\alpha b*(1-\alpha)c)$が成り立つ．

(U-4)：aP_ibとするとき，$\lambda>\mu(\lambda, \mu \in [0,1])$ならば$(\lambda a*(1-\lambda)b)P_i(\mu a*(1-\mu)b)$．

条件(U-2)はaP_ibP_ic，つまり，iがcよりb，bよりaを選好するとき，aとcを結果とするある（複合）くじでbと無差別なものを構成することができることを意味している．(U-3)は“Sure Thing Principle”とも呼ばれ，くじの間の選好は結果にのみ依存し，確率混合をすること，つまり，ルーレットを回すことによる効用は発生しないことを意味している．また(U-2)に若干異なる定式化を行なったものと(U-3)の2条件により(U-4)が導出されるので，(U-4)は本質的条件ではない．ここでは議論を簡明にし，数学をあまり用いずに話を進めたいので上記の定式化を行なった．詳しくはハーシュタイン－ミルナー〔3〕を参照のこと．

以上の4条件により次の定理が得られる．

定理 I　R_iが(U-1)，(U-2)，(U-3)，(U-4)を満足するとき，次の(2)，(3)を満足する実数値関数$u_i(a)$が存在する：

(2) $aR_ib \Leftrightarrow u_i(a) \geqq u_i(b)$

(3) 任意の$a, b \in m(X^*)$および$\alpha \in [0,1]$に対して$u_i(\alpha a*(1-\alpha)b)=\alpha u_i(a)+(1-\alpha)u_i(b)$が成り立つ．

さらに，このu_iは正一次変換の範囲で一意に決定される．つまり，u_i，v_iが(2)，(3)を満足するならば定数$\alpha>0, \beta$が存在し，

(4) $v_i(a)=\alpha u_i(a)+\beta$　　for all $a \in m(X^*)$

が成り立つ．

選好関係が上の4つの条件を満足するとき，それを実数の順序で表現することが可能なこと，および，それが(3)式（確率混合に対しての線型性）を満足することを，この定理は意味している．これがいわゆるノイマン－モルゲンシュテルン効用関数の存在定理である．この定理の意味の吟味および批判はルース－ライファ〔12〕が詳しい．

以後，個人的選好関係R_iについては常に(U-1)――(U-4)を仮定する．R_iに対して(2)，(3)を満足する関数の全体を$U(R_i)$と表わす．もちろん，$u_i, v_i \in U(R_i)$ならば，(4)を満足する$\alpha>0, \beta$が存在することを忘れてはならない．

原点x_0の意味から，次の条件

(O-1)　aR_ix_0　　for all $a \in m(X^*)$

を仮定せねばならない．つまり，原点x_0は各個人i

にとって最悪の状態である．

§2. ナッシュ社会的厚生関数

条件(U-1)，(U-2)，(U-3)，(U-4)および(O-1)を満足する選好関係の n 個の組，

$p=(R_1, \cdots, R_n)$

をプロフィールと呼ぶ．p は個人 $i \in N$ が選好関係 R_i を持つことを意味している．プロフィール p の全体を P で表わす．

プロフィール $p=(R_1, \cdots, R_n)$ が与えられたとき，$m(X^*)$ を次のように制限する：

(5) $m_p(X^*)=\{a \in m(X^*) : aP_ix_0 \quad \text{for all } i \in N\}$.

$m_p(X^*)$ はすべての個人が原点との比較で原点より選好する選択枝の全体である．社会的順序は $m_p(X^*)$ 上に定義するのであり，少なくとも1人の個人が原点と無差別であるような選択枝（もちろん，原点 x_0 も）は初めから社会的に最悪な状態とし，以下の考察の対象からはずす．

社会的厚生関数 W は各プロフィール $p \in P$ に対して $m_p(X^*)$ 上の社会的順序 R_p を対応させる関数とする．つまり，

$$W : p \in P \mapsto R_p \quad \text{on } m_p(X^*),$$

書き方をかえると，

(6) $W(p)=W(R_1, \cdots, R_n)=R_p \quad \text{for all } p \in P.$

aR_pb は，社会の構成メンバーが選好関係 $R_1, \cdots, R_n$ を持つとき，社会的厚生関数 W が選択枝 b より a の方が社会的厚生が高いか両者の社会的厚生が等しいと判断することを意味する．

まず，次の条件を仮定しよう．

(S-1)（弱順序性）：各 $p \in P$ に対して，$W(p)=R_p$ は $m_p(X^*)$ 上の弱順序である．

弱順序の定義は(U-1)を見よ．P_p および I_p を

$aP_pb \Leftrightarrow \text{not } bR_pa$

$aI_pb \Leftrightarrow aR_pb \ \& \ bR_pa$

で定義する．aP_pb は a の方が b より社会的厚生が高いことを，また，aI_pb は a と b との社会的厚生が等しいことを意味している．

条件（U-2）の意味を考えると R_p にもこの条件を課すのは自然でかつ妥当であろう．

(S-2)（確率混合に対しての連続性）：$W(p)=R_p$ としよう．aP_pbP_pc であるならば，ある $\alpha (0<\alpha<1)$ に対して $(\alpha a*(1-\alpha)c)I_pb$ が成り立つ．

条件（U-3）（代替性）を社会的順序に課すべきかどうかの問いには次の例が答えるであろう．

例1　$N=\{1,2\}$ とし，個人1と2は同じタイプの人間としよう．つまり，選好関係も現在の所得も等しいとする．いま，追加的所得 $M>0$ を2人で分ける場合を考える．個人1に M の全額を与えるという選択枝を（M，O）とし，個人2にその全額を与える選択枝を（O, M）とする．2人がまったく対称的なので，

$(M,O)I_p(O,M)$

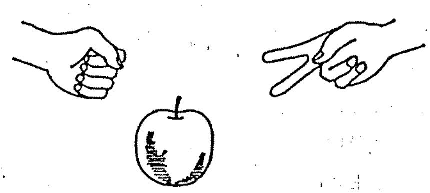
と考えるのは自然であろう．もし(U-3)が成り立つと，

$$\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)I_p\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(M,O)\right)=(M,O)$$

となる．左辺では個人1，2ともに M を得る確率が $\frac{1}{2}$ であるが，右辺では個人1が確実に M を得てしまう．われわれの平等性の理解からすれば，明らかに左辺の方が社会的に選ばれるべきであるといえよう．つまり，M を得る可能性を両方が持つ方がより平等であるということである．したがって，（U-3）を社会的順序に仮定することはできない．

この例は確率混合をすることにより社会的厚生が増加する可能性があることを示している．くじ $\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)$ は確率的に M を分配するのであるが，M が分割可能ならば M を等分して分配する $\left(\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right)$ という選択枝も考えられる．これらの選択枝に対してわれわれの理論がいかなる社会厚生の順序をつけるか．それに関しては以下の節で論じる．

条件（U-4）も社会的順序に仮定しないが，（U-4）は1節で述べたように本質的な条件でないので新たな議論を省く．



ジャンケンは社会的厚生を高める

さて，次に社会的厚生関数に課する条件はパレート性である．

(S-3) **(パレート条件)**：$W(p)=W(R_1,\cdots,R_n)=R_p$ とする．もし，aR_ib for all $i\in N$ かつ aP_ib for some $i\in N$ であるならば，aP_pb が成り立つ．

条件（S-3）は，メンバーの誰の効用も下げることなく少なくとも1人のメンバーの効用を高めることができるならば，社会的厚生がより高くなることを意味している．

（S-4）**(匿名性)**：$\pi=(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n)$を$(1,2,\cdots,n)$の任意の順列としよう．このとき，$W(R_1,\cdots,R_n)=W(R_{\pi 1},\ R_{\pi 2},\cdots,R_{\pi n})$が成り立つ．

条件（S-4）は構成メンバーの選好関係$R_1,\cdots,R_n$を構成メンバーの中で取りかえても社会的順序に変化が生じないことを意味している．言いかえると，社会的順序は構成メンバーの名前（個人）に依存せず，そのメンバーが持っている選好関係にのみ依存する．この条件はパレート条件と並んで社会的厚生を考えるときに不可欠の条件である．

最後に次の条件を課す．

(S-5) **(原点以外の無関係な選択枝からの独立性)**：$p=(R_1,\cdots,R_n)$, $p'=(R_1',\cdots,R_n')$ とし $a,b\in m_p(X^*)$, $c,d\in m_{p'}(X^*)$ としよう．いま，すべての $i\in N$ に対して

$$(7)\quad \begin{array}{l}(\alpha_1a*\alpha_2b*\alpha_3x_0)\ R_i(\beta_1a*\beta_2b*\beta_3x_0)\Longleftrightarrow\\ (\alpha_1c*\alpha_2d*\alpha_3x_0)\ R_i'(\beta_1c*\beta_2d*\beta_3x_0)\end{array}$$

for all $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ $(\sum_{t=1}^{3}\alpha_t=\sum_{t=1}^{3}\beta_t=1,\ \alpha_t,\ \beta_t\geqq 0)$ が成り立つとしよう．このとき，$aR_pb\Longleftrightarrow cR_{p'}d$ が成り立つ．ただし，$W(p)=R_p$ および $W(p')=R_{p'}$.

一般に，独立性の条件は，2つのプロフィールpおよびp'が与えられたとき選択枝a,bとc,dとの間の関係の構造がプロフィールについてまったく同じであるならば，社会的厚生関数はそれらの間に同じ順序を与えねばならないことを要請する．ここでは，a,bとc,dとの間の構造がまったく同じであることを条件(7)が要請するのである．条件(7)は選択枝a,bとc,dとの関係は原点x_0を基にして測り，確率混合に対する態度も同じであることを意味している．これは，原点と確率混合を導入した場合の独立性の自然な要請である．この条件は他の条件に比べてやや専門的であるが，ノイマン－モルゲンシュテルン効用理論の意味を考えることによって理解は容易になるであろう．

プロフィール $p=(R_1,\cdots,R_n)$ が与えられたとき，定理Iにより効用関数 $u_1,u_2,\cdots,u_n(u_i\in U(R_i)$ for all $i\in N)$が存在する．ここで $u=(u_1,\cdots,u_n)$ と表わす．実数値関数 $w_0(u,a)=w_0(u_1,\cdots,u_n,a)$ を

$$(8)\quad w_0(u,a)=\sum_{i\in N}\log(u_i(a)-u_i(x_0))\quad \text{for all } a\in m_p(X^*)$$

と定義する．w_0 を**ナッシュ社会的厚生指標**と呼ぶ．

以上の5条件から次の定理が得られる．この定理が本理論の主要結果である．

定理II Xの選択枝の数mを3以上とする．このとき，社会的厚生関数Wが条件 (S-1)——(S-5) を満足するための必要十分条件は，

$$(9)\quad aR_pb\Longleftrightarrow w_0(u,a)\geqq w_0(u,b)$$

がすべての$p\in P$とすべての$a,b\in m_p(X^*)$に対して成り立つことである．ただし $W(p)=R_p$ とする．

この定理は，条件 (S-1)——(S-5) を受け入れる限り，ナッシュ社会的厚生指標が与える実数としての順序で社会的厚生が定義されることを意味している．ここで$w_0(u,a)$が与える順序は$u=(u_1,\cdots,u_n)$の選び方に依存しないことに注意しよう．つまり，$u_i,v_i\in U(R_i)(i\in N)$ならば$v_i=\alpha_iu_i+\beta_i$ なる $\alpha_i>0,\beta_i$ が存在するので，

$$\begin{aligned}w_0(v,a)&=\sum_{i\in N}log(v_i(a)-v_i(x_0))\\&=\sum_{i\in N}log\ (\alpha_iu_i(a)-\alpha_iu_i(x_0))\\&=\sum_{i\in N}log(u_i(a)-u_i(x_0))+\sum_{i\in N}log\ \alpha_i\\&=w_0(u,a)+\sum_{i\in N}log\ \alpha_i\end{aligned}$$

となるからである．(S-1) ——(S-5) を満足するWを**ナッシュ社会的厚生関数**と呼ぶ．

以上の理論が例1の問いにどのように答えるか考えてみよう．

例2 個人1，2はおのおの10000単位の所得を得ているとし，効用関数は各々 $\sqrt{m}$であるとしよう．例1の状況設定のとおり，個人1，2は対称である．例1のMを2100としよう．原点 x_0 は両者の所得が0である状態とするのが原点の意味から考えて自然である．選択枝$(M,O)=(2100,\ O)$と原点x_0の効用は，

$$u_1((M,O))=\sqrt{10000+2100}=110,\ u_1(x_0)=\sqrt{0}=0,$$
$$u_2((M,O))=\sqrt{10000}=100,\ u_2(x_0)=\sqrt{0}=0$$

である．(O,M)についても同様に計算できる．

$\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)$については，

$$u_1\left(\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)\right)$$
$$=u_2\left(\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{10000}+\frac{1}{2}\sqrt{12100}=105$$

と計算できる．したがってナッシュ社会的厚生指標 $w_0(u,\cdot)$ の値は

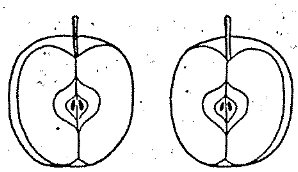
$$w_0(u,(M,O))=w_0(u,(O,M))$$
$$=log\,110+log\,100\fallingdotseq 4.041$$
$$w_0\left(u,\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)\right)=log\,105+log\,105$$
$$\fallingdotseq 4.042$$

となる．つまり，$\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)$の方が社会的厚生は高いのである．$M$を等分する選択枝$\left(\frac{M}{2},\ \frac{M}{2}\right)$については，

$$u_1\left(\left(\frac{M}{2},\ \frac{M}{2}\right)\right)=u_2\left(\left(\frac{M}{2},\ \frac{M}{2}\right)\right)=\sqrt{11050}\fallingdotseq 105.12,$$
$$w_0\left(u,\left(\frac{M}{2},\ \frac{M}{2}\right)\right)=log\sqrt{1150}+log\sqrt{1150}\fallingdotseq 4.043$$

となり，$\left(\frac{1}{2}(M,O)*\frac{1}{2}(O,M)\right)$よりも社会的厚生は高い．

要約すると，Mを何もせず1人に与えるよりも確率的に分配した方が社会的厚生が高まり，等分すれば確率的分配よりもさらに社会的厚生は高まる．これはわれわれの直観と矛盾しないであろう．



等分した方がジャンケンで分けるより良い

§3. アローの一般不可能性定理との比較

アローの主張が社会的厚生関数を構成することが不可能であるとするのに対し，われわれは定理Ⅱで1つの社会的厚生関数を構成した．それゆえ，2つの理論はたがいに矛盾した部分を持つ．したがって，2つの理論の相違点を明確にする必要があるであろう．ここでは社会的厚生関数の考え方の相違点と，それが数学的設定においてどのように反映されているかを簡単に議論しよう．

アローは社会的厚生関数を民主的な社会的決定プロセスとしてとらえ，多数決等を具体的な例として考えていた．たとえば，〔1〕では彼の広範性の条件を落とせば多数決ルールが彼の他のすべての条件を満足することを述べ，多数決ルールが社会的厚生関数として適用できる範囲(単峰性等)を詳しく論じている．また，彼の条件を少し変形することによって多数決ルールが導かれることをメイ〔13〕が証明している．

民主的な社会的決定プロセスとして社会的厚生関数を考えるのは社会的厚生関数の1つの定義の仕方である．しかし，そのように定義された社会的厚生関数が順序を与えず，その厚生比較においてサイクルを生じることがあるのは当然の結果であると言える．これに対して，われわれは社会的決定プロセスを与えることをいちおう，放棄し，社会的厚生関数は単にいくつかの規準を満足する関数として定義しようとしている．この点は，われわれがノイマン－モルゲンシュテルン効用理論を仮定していること，および，それを十分に活用して設定した独立性の条件（S-5）などから以下のように理解することができる．アローの独立性の条件に比しては，（S-5)は社会的厚生関数が極めて微細な情報に対して反応できることを許している．つまり，アローの条件が2つの選択枝の間の選好関係についての情報に社会的厚生関数が反応することを規定するのに対し，（S-5)は，両選択枝以外に原点 x_0 を加え，さらに，それらの間のすべての確率混合の上の選好関係についての情報に対し社会的厚生関数が反応できることを許している．アローの独立性の条件は多数決ルールによって反映されると考えてよいが，多数決ルールによっては(S-5)の許している反応の可能性を反映しつくすことはできないのである．1つの判断をするのに極めて微細な情報を必要とする決定プロセスは，コストの面から言ってプラクティカルとは言えない．このような意味においてナッシュ社会的厚生関数は多数決ルールのようなプラクティカルな決定プロセスを伴わないと言ってよい．

社会的厚生関数とその厚生を最大にするプロセスとは本来，異なるものであり，社会的厚生関数が決定プロセスを伴わないのは当然である．ナッシュ社会的厚生関数を最大にする決定プロセスは社会のおのおのの状況で設計すべきものであり，それはこれからの課題である．

§4. 思考実験

ナッシュ社会的厚生関数がわれわれの社会的厚生の直観的理解と矛盾していないか，簡単な思考実験によ

って吟味してみよう．

例 3　$N=\{1,2\}$ で，1，2の効用関数は$\sqrt{m}$であるとし，2人の所得はおのおの m_1, m_2 であるとする．いま，$M>0$ を2人で分ける場合を考える．このとき，選択枝の集合Xは

$$X=\{(m,\ M-m):0\leqq m\leqq M\}$$

となる[3]．原点は2人とも所得が0の状態である．このとき，ナッシュ社会的厚生指標は，

$$w_0(u,(m,M-m))=log\sqrt{m+m_1}+log\sqrt{M-m+m_1}$$

と表わされる．w_0 を最大にする選択枝を求めてみよう．mは自由な値をとれるものとして，w_0 をmで微分して0とおくと，

$$\frac{1}{\sqrt{m+m_1}}=\frac{1}{\sqrt{M-m+m_2}}$$

となる．したがって，$m+m_1=M-m+m_2$ となるが，$0\leqq m\leqq M$を考慮すると，w_0 を最大にする選択枝 $(m_0,\ M-m_0)$ は

$$(10)\quad m_0=\begin{cases} M & \text{if}\quad M+m_1\leqq m_2 \\ \dfrac{M+m_2-m_1}{2} & \text{if}\quad m_1\leqq m_2+M\ \&\ m_2\leqq m_1+M \\ 0 & \text{if}\quad M+m_2\leqq m_1 \end{cases}$$

で与えられる．つまり，$M+m_1\leqq m_2(M+m_2\leqq m_1)$ のとき，個人1（個人2）に全額$=M$を与える．また，$m_1\leqq m_2+M$ ＆ $m_1\leqq m_2+M$ のとき，個人1に$\frac{M+m_2-m_1}{2}$，個人2に$\frac{M+m_1-m_2}{2}$を分配し，その結果，1も2も所得は$\frac{M+m_1+m_2}{2}$となり，両者の所得は等しくなる．この例は（図1）のようになる．

例 4　個人1，2がある病気に罹り，しかし，薬は1人分しかないとする．薬を服用しない場合，両者ともに完治に3週間を要する．個人1が薬を服用すれば，確率$\frac{1}{2}$で薬が効き1週間で完治し，確率$\frac{1}{2}$で薬が効かず完治に3週間を要する．個人2が薬を服用すれば，確率$\frac{1}{2}$で薬が効き2週間で完治し，確率$\frac{1}{2}$で薬が効かず完治に3週間を要する．x_1, x_2 をおのおの薬を1，2に与える選択枝とし，x_3を両者に薬を与えない選択枝とする．この状況の効用図表は（図2）のごとく描ける．したがって，社会的厚生の最も高い選択枝を $(\alpha_0 x_1 * (1-\alpha_0)x_2)$ とすると，$\alpha_0>\frac{1}{2}$となる．つまり，個人1に薬を与える確率の方が個人2に薬を与える確率よりも大きくなければならない．これは直観と矛盾しないであろう．

図1

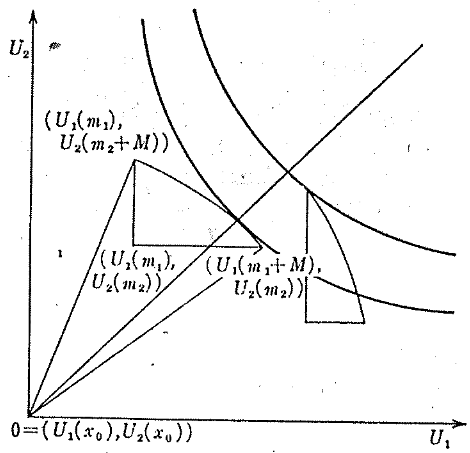
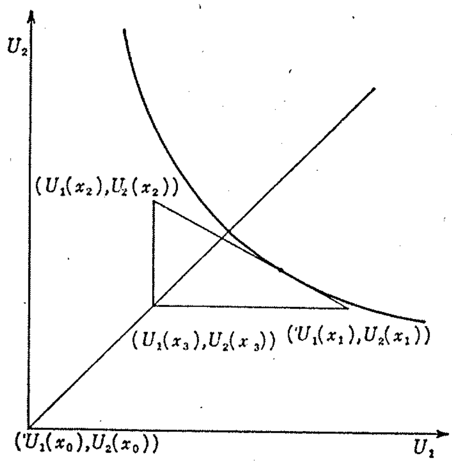


図2



例 5　個人1，2が重病に罹り，薬は再び1人分しかないとしよう．薬がない場合は両者とも確実に死に，個人1が薬を服用した場合，確実に病気は完治し，個人2が薬を服用すれば確率$\frac{1}{2}$で病気は完治し，確率$\frac{1}{2}$で死ぬとする．x_1, x_2 をおのおの，薬を1，2に与えるという選択枝とする．Dを"死" Lを"生"としたとき，

$$u_i(L)>u_i(D)=0 \qquad i=1,2$$

と仮定しよう．原点は $x_0=(D,D)$ である．このとき，選択枝 x_1, x_2 に対する効用は，

$$(11)\quad \begin{aligned} &u_1(x_1)=u_1(L)>u_1(x_2)=u_1(D)=u_1(x_0)=0 \\ &u_2(x_2)=\frac{1}{2}u_2(L)>u_2(x_1)=u_2(D)=u_2(x_0)=0 \end{aligned}$$

となる．$m_p(\{x_0, x_1, x_2\})$上で w_0 を最大にする選択枝を計算すると$\left(\frac{1}{2}x_1 * \frac{1}{2}x_2\right)$となる．つまり，薬を確率$\frac{1}{2}$のくじで分けることで最大の社会的厚生が与えられる．これは直観と少しも矛盾しないであろう．

さて，状況を少し変えて，個人2が薬を飲んでも確率$\frac{1}{100}$でしか治らないとしよう．この場合も選択枝

$\left(\frac{1}{2}x_1 * \frac{1}{2}x_2\right)$が $m_p(\{x_0, x_1, x_2\})$ 上で w_0 を最大にする．これはわれわれの直観に矛盾しているように思われるのではないだろうか．つまり，この場合，個人1に薬を与える確率を大きくとるのが自然ではないかという疑問を感じるのである．この疑問に対して状況をより正確に記述することによって答えることができる．

この疑問を感じるとき，われわれは自分自身を個人1および2に置き替えてこの状況を考えている．その場合，効用関数は他人の状態と独立でなく，相互依存していると考えられる．しかし，(11)の設定では各個人の効用は自分自身の状態にのみ依存し，他の個人の状態には影響されないとしている．この点が重要であり，日常的心理を脱し，本論を明確に理解すれば上記の結果に対して抱いていた疑問は解消するのではないだろうか．もし，各個人が他の個人の状態にまったく無関心であるとするならば，個人1に薬を与える確率を大きくするという理由はどこにもない．しかし，上で述べた主張に従うと，(11)は

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&u_1(L, D) > u_1(D, L) > u_1(x_0) = 0\\
&u_2(D, L) > u_2(L, D) > u_2(x_0) = 0
\end{aligned}
$$

と書き改められる．ここで，$(L, D)((D, L))$は個人1の生(死)，個人2の死(生)の状態を意味している．しかし，$u_1(D, L)$ および $u_2(L, D)$ は非常に小さいと考えられる．このとき，

$$
(13)\quad
\begin{aligned}
&u_1(x_1) = u_1(L, D) > u_1(x_2) = \frac{1}{100}u_1(D, L)\\
&\qquad > u_1(x_0) = 0\\
&u_2(x_2) = \frac{1}{100}u_2(D, L),\ \ u_2(x_1) = u_2(L, D)\\
&\qquad > u_1(x_0) = 0
\end{aligned}
$$

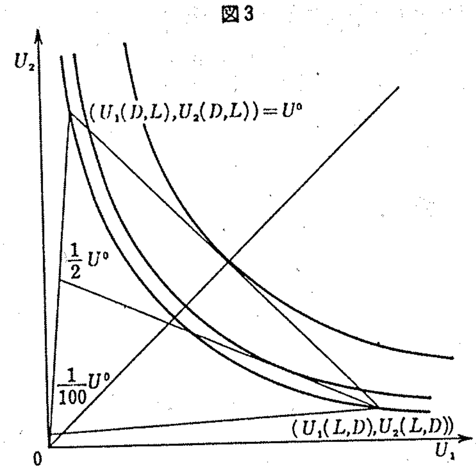
と計算される．この定式化において，ナッシュ社会的厚生指標を最大にする選択枝$(\alpha_0 x_1 * (1-\alpha_0)x_2)$ の α_0 は1に近い値をとる．（図3）を参照せよ．したがって，上記の疑問は解消された．

また，(12)のように設定したとき，例5の前半の例において（つまり，2に薬を与えたとき確率$\frac{1}{2}$で病気が治る場合）社会的厚生を最大にする選択枝（$\alpha_0 x_1 * (1-\alpha_0)x_2$）の α_0 は$\frac{1}{2}$より大きいが$\frac{1}{2}$に非常に近くなる．したがって，(12)の設定はこの場合にも矛盾を起こさない．

§5. 結語

以上の4節でナッシュ社会的厚生関数の理論の簡単な紹介をしてみたが，詳論は金子 - 中村〔5〕を参照されたい．ここで紹介したものの他にもナッシュ社会的厚生関数を基にさまざまな議論がある．たとえば，金

図3



子 - 中村〔6〕では，選択枝の間の順序だけでなく社会的厚生の差も考慮することによりナッシュ社会的厚生指標を基数化している．また，金子〔7〕では，ナッシュ社会的厚生関数の理論とナッシュ〔14〕，〔15〕の交渉理論との数学的同値性について論じている．この数学的同値性がナッシュ社会的厚生関数の名前の由来である．また，この理論の応用については金子〔10〕，〔11〕等があり，〔10〕では所得分配の不平等性について論じ，〔11〕では最適な所得税制について論じている．これらの応用については，また機会を新たにしたいと思う．

参考文献

〔1〕 K.J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, 2nd ed. (1963), John Wiley, 日本語版『社会的選択と個人的評価』(長名寛明訳)，日本経済新聞社.

〔2〕 J. C. Harsanyi, "Cardinal Welfare, Individualistic Ethics,and Interpersonal Comparision of Utility", *Journal of Policical Economy*, 63 (1955), 309—321.

〔3〕 I. N. Herstein and J. W. Milnor, "An Axiomatic Approach to Measurable Utility", *Econometrica*, 21(1953), 291—297.

〔4〕 C. Hildreth, "Alternative Conditions for Social Orderings", *Econometrica*, 21(1953), 81—94.

〔5〕 M. Kaneko and K. Nakamura, "The Nash Social Welfare Function", *Econometrica*, 47 (1979), 423—435.

〔6〕 ______, "Cardinalization of the Nash Social Welfare Function", *Economic Studies Quarterly*

(『季刊理論経済学』) 30(1979), 236—242.

〔7〕 M. Kaneko, "An Extension of the Nash Bargaining Problem and the Nash Social Welfare Function", *Theory and Decision*, 12(1980) 近刊.

〔8〕 ______, "The Nash Social Welfare Function for a Measure Space of Individuals, To appear in *Journal of Mathematical Economics*.

〔9〕 ______, "A Bilateral Monopoly and the Nash Cooperative Solution", mimeo.

〔10〕 ______, "A Measure of Inequality in Income Distribution", mimeo.

〔11〕 ______, "The Optimal Progressive Income Tax-the Existence and the Limit Tax Rates" mimeo

〔12〕 D. Luce and H. Raiffa, *Game and Decision*, John Wily (1957).

〔13〕 K. O. May, "A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision", *Econometrica*, 20(1952), 680—684.

〔14〕 J. F. Nash, "The Bargaining Problem", *Econometrica*, 18(1950), 155—162.

〔15〕 ______, "Two Person Cooperative Games", *Econometrica*, 21(1953), 128—140.

〔16〕 J. Rawls, *A Theory of Justice*, Harvard University Press (1971).

〔17〕 J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, 3 rd. ed. (1953), Princeton University Press. 日本語版『ゲームの理論と経済行動』(銀林浩他訳), 東京図書株式会社.

注

1) *X*の選択枝の数が無限の場合も以下の理論はほとんどそのまま成立するが, 話を簡単にするために選択枝の数を有限とした.

2) 本理論においてのこの仮定の役割は読み進むにつれ明白になるであろう. 金子〔7〕で本理論におけるこの仮定の役割を交渉理論の立場から論じているが, 本稿ではそれについては論じない.

3) 注1)を参照.

(かねこ まもる/ゲーム理論)