

非対称 t 接合関数の最尤推定と計量ファイナンスへの応用*

日本銀行 金融研究所 吉羽 要直

金融ポートフォリオのリスク量の把握などに際して、リスクファクター間の相互依存関係は、依存性の程度を線形相関行列で柔軟に表現できる正規接合関数 (Gaussian/Normal copula) か t 接合関数 (Student- t copula) で表現されることが多い。正規接合関数は、線形相関行列を用いたリスクファクター間の依存性について、リスクファクター単独の変動 (周辺分布) に関しては正規分布以外の分布も許容した拡張表現となっており、推定等は容易である。しかしながら、ファクターとなる資産価格変動の裾での依存性は低くなるという特徴を有しているため、デフォルトなどを含めストレス状況での資産変動の記述には向かず、証券化商品の価格が暴落したリーマンショック時には批判の対象となった。一方、 t 接合関数は、ファクターとなる資産価格変動の裾での強い依存性を表現できるため、ストレス状況を考慮した金融リスクの把握に実務上広く用いられている。しかしながら、ファクターとなる資産価格変動の依存性について、上昇の場合も下落の場合も同じ依存性になるという対称性の制約があり、非現実的な設定となってしまう。そこで、本研究では非対称な裾依存性を表現できる非対称 t 接合関数 (skew- t copula) の利用を検討する。

非対称 t 接合関数は、多変量の非対称 t 分布から導かれる接合関数であるが、多変量の非対称 t 分布については様々な提案があることから様々な非対称 t 接合関数を定義でき、先行研究では非対称 t 接合関数として3つの提案がなされている。本研究では、このうち Joe [2006] が言及した Azzalini and Capitanio [2003] による多変量の非対称 t 分布 (AC 非対称 t 分布) から導かれる接合関数 (AC 非対称 t 接合関数) について検討する。AC 非対称 t 分布は、統計学上は最も利用されている多変量の非対称 t 分布であるが、その接合関数の推定方法や実証分析についてはまだ研究があまり進んでいないことから、本研究ではまず AC 非対称 t 接合関数の最尤推定を検討する。また、比較対象として、Demarta and McNeil [2005] によって提案された多変量の一般化双曲型 (generalized hyperbolic) の非対称 t 分布から導かれる接合関数 (GH 非対称 t 接合関数) も検討する。

非対称 t 接合関数の最尤推定を検討する際には、Yoshida [2014] で示したように、2点の問題を解決する。第1点は、尤度関数に含まれる1変量の非対称 t 分布の分位点の計算を高速化することであり、分布関数の値を補間する手法を提案する。第2点は、AC 非対称 t 接合関数では歪みと相関のパラメータを拡大した相関行列、GH 非対称 t 接合関数では通常の相関行列が非負定値対称行列で対角要素を1に保つことである。これについては、コレスキー分解した行列成分を極座標表示することを提案する。このように構築した非対称 t 接合関数の最尤推定法が有効に機能することをシミュレーションにより確認する。

* 本講演で示される意見は、講演者個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて講演者個人に属する。

以上のように構築した非対称 t 接合関数の最尤推定法を用いて、本邦の株価（日経平均）、米国の株価（S&P500）、欧州の株価（DAX）の日次収益率を用いて実証分析を行う。具体的には、収益率そのものと GARCH や EGARCH でフィルタリングした基準化残差の 3 変量データについて、歪みのパラメータは各変量で同一と仮定した上で、AC 非対称 t 、GH 非対称 t 、（対称な） t 、非対称正規、正規の各接合関数のパラメータを最尤推定し、赤池情報量規準やバイズ情報量規準でモデル選択を行う。その結果、多くの場合に AC 非対称 t 接合関数が選択されることを示す。これは、AC 非対称 t 接合関数が資産変動の依存性の表現として適切であることを示唆している。

参考文献

- Azzalini, A. and A. Capitanio [2003] “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t -distribution,” *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, **65**(2), 367–389.
- Demarta, S. and A. J. McNeil [2005] “The t copula and related copulas,” *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129.
- Joe, H. [2006] “Discussion of ‘Copulas: tales and facts,’ by Thomas Mikosch,” *Extremes*, **9**(1), 37–41.
- Yoshida, T. [2014] “Maximum likelihood estimation of skew t -copula,” 統計数理研究所 Research Memorandum No.1183.
<http://www.ism.ac.jp/editsec/resmemo/resmemo-file/resm1183.pdf>